(2) $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 则

当 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\neq 0$ 时,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(a\times b)\cdot c}\begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$$

其中 $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)=\vec{b}\times\vec{c}$

$\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)=\vec{c}\times\vec{a}$

$w=(w_1,w_2,w_3)=\vec{a}\times\vec{b}$

(3) $a_1\cdots a_n\neq 0$ 则

$$\boxed{\begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & & \\ & a_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}}$$

例: 若 $f(A)=0$ 且 $f(a)\neq 0$ 则 $A-aI$ 可逆.

$(I+J)^{-1}=?$

例: $A, B, A+B$ 可逆 $\Rightarrow$ $A^{-1}+B^{-1}$ 可逆

§ 转置，共轭与迹

定义：1) $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{m\times n}$ 称 $A^T:=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

为 A 的转置矩阵.

2) $A=(a_{ij})_{m\times n}\in \mathbb{C}^{m\times n}$，称 $\bar{A}:=(\bar{a}_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{12} & \cdots & \bar{a}_{1n} \\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \\ \bar{a}_{m1} & \bar{a}_{m2} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$

为 A 的共轭矩阵.

3) n 阶方阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}\in F^{n\times n}$. 称 $tr(A):=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$

为 A 的迹.

例：$A=\begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 3-i & 4+i \end{pmatrix}$ $A^T=?$, $\bar{A}=?$, $tr(A)=?$

转置性质：
(1) $(A+B)^T=A^T+B^T$
(2) $(\lambda A)^T=\lambda\cdot A^T$
(3) $(AB)^T=B^TA^T$
(4) $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$

证：…

迹性质：
(1) $tr(A+B)=tr(A)+tr(B)$
(2) $tr(\lambda A)=\lambda\, tr(A)$
(3) $tr(A^T)=tr(A)$, $tr(\bar{A})=\overline{tr(A)}$
(4) $tr(AB)=tr(BA)$

证：…

例：$A\in \mathbb{C}^{m\times n}$, $tr(A\bar{A}^T)=0 \Rightarrow A=0$.

证：…

§ 分块运算

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \alpha_j := \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad \beta_i := (a_{i1}\ a_{i2}\ \cdots\ a_{in})$$

$$\Rightarrow \quad A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

更一般

$$\Rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \cdots & & & \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix} \qquad (\text{记 } A=(A_{ij})_{r\times s}$$

$\uparrow$ A的子块

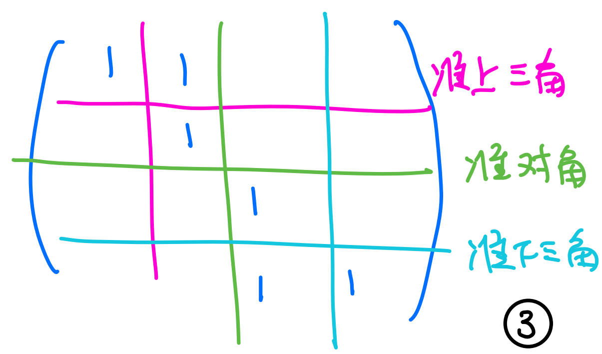
子矩阵： $$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_s} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i_rj_1} & a_{i_rj_2} & \cdots & a_{i_rj_s} \end{pmatrix}$$

准对角矩阵 $\quad diag(A_{11},\cdots,A_{rr})$

准上三角矩阵

准下三角矩阵

注：依赖于分块方式



$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ \shortparallel & \shortparallel \end{array} \\
A = \left(\begin{array}{cc|cc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
\hline
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cc} \shortparallel & \shortparallel \\ A_{21} & A_{22} \end{array}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} B_{11} & B_{12} \\ \shortparallel & \shortparallel \end{array} \\
B = \left(\begin{array}{cc|cc}
b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\
b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\
\hline
b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\
b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}
\end{array}\right) \\
\begin{array}{cc} \shortparallel & \shortparallel \\ B_{21} & B_{22} \end{array}
\end{array}
$$

$A + B$

$A \cdot B$

λA

A^T

$\bar{A}$

$tr(A)$

性质：

(1) $A=(A_{ij})_{r\times s}$, $B=(B_{ij})_{r\times s}$ $\Rightarrow$ $A+B=(A_{ij}+B_{ij})_{r\times s}$

(2) $A=(A_{ij})_{r\times s}$ $\Rightarrow$ $\lambda A=(\lambda A_{ij})_{r\times s}$

(3) $A=(A_{ij})_{r\times s}$ $B=(B_{ij})_{s\times t}$ $\Rightarrow$ $AB=(C_{ij})_{r\times t}$

其中 $C_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{s}A_{ik}B_{kj}$.

(4) $A=(A_{ij})_{r\times s}$ $\Rightarrow$ $A^T=(A_{ji}^T)_{s\times r}$

(5) $A=(A_{ij})_{r\times s}\in\mathbb{C}^{m\times n}$ $\Rightarrow$ $\bar{A}=(\bar{A}_{ij})_{r\times s}$

(6) $A=(A_{ij})_{r\times r}$ & $A_{ii}=$方阵 $\Rightarrow$ $tr(A)=\sum\limits_{i=1}^{r}tr(A_{ii})$

(7) $A_1,\cdots,A_r$ 可逆 $\Rightarrow$ $\left(diag(A_1\cdots A_r)\right)^{-1}=diag(A_1^{-1},\cdots,A_r^{-1})$

注： (3)中 A_{ik} 的列数 $=$ B_{kj} 的行数

例：

$$A=\begin{array}{c}\begin{array}{cc} B & \quad I \\ \shortparallel & \quad\shortparallel \end{array}\\ \left(\begin{array}{cc|cc} 1&1&1&0\\ 0&1&0&1\\ \hline &&1&1\\ &&0&1 \end{array}\right)\end{array}\qquad A^n=?$$

归纳 $\Rightarrow$ $A^n=\begin{pmatrix} B^n & nB^{n-1}\\ 0 & B^n\end{pmatrix}$ $\qquad B^n=\begin{pmatrix}1&n\\0&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\quad A^n=\left(\begin{array}{cc|cc} 1&n&n&n(n-1)\\ 0&1&0&n\\ \hline &&1&n\\ &&0&1 \end{array}\right)$$